

Exercices de soutien depuis janvier

Exercice 1 :

- 1) Montrer, sans utiliser les propriétés des fonctions affines, que la fonction $f(x) = -5x + 7$ est décroissante sur \mathbb{R} .
- 2) D'une manière générale, étudier le sens de variations d'une fonction affine de la forme $f(x) = mx + p$, avec $m, n \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Étudier le sens de variations de $g(x) = 4x^2 - 20x + 24$ sur $[2, 5, +\infty[$

- 1) en utilisant les propriétés des fonctions du second degré,
- 2) sans utiliser les propriétés des fonctions du second degré.

Exercice 3 : Soit $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$.

- 1) Donner l'ensemble de définition de h .
- 2) Étudier la parité de la fonction h , et en déduire l'interprétation graphique.
- 3) Étudier le sens de variations de h sur \mathbb{R}^+ .
- 4) En déduire le sens de variations de h sur \mathbb{R}^- .
- 5) Montrer que h est bornée.

Exercice 4 : Résoudre :

- 1) $|3x - 7| \leq 3$
- 2) $|5x + 11| > 2$
- 3) $\frac{8x^2 - 4x + 1}{5x^2 + 3x - 1} \geq -\frac{8}{5}$

Exercice 5 : Soit $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{8x^2 + 7}$ sur \mathbb{R} . Quel est le sens de variation de f sur \mathbb{R}^{**} ?
Que peut-on en conclure ?

Exercice 5 : Trouver des exemples de fonctions f et g croissantes telles que :

- 1) $\frac{f}{g}$ soit croissante,
- 2) $\frac{f}{g}$ soit décroissante.

Exercice 6 : Faire l'étude de $h(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ (ensemble de définition, parité, intersection avec les axes, variations).

Exercice 7 :

- 1) Prouver que la fonction $d(x) = x^5 - 10x^4 + 27x^3 - 2x^2 - 77x$ définie sur \mathbb{R} admet $(2; -74)$ comme centre de symétrie.
- 2) Prouver que la fonction $e(x) = x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 30x + 3$ définie sur \mathbb{R} admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.
- 3) Prouver que la fonction $f(x) = \frac{x^4 - 51x^2 + 198x - 211}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ (pourquoi ?) admet $(3; -12)$ comme centre de symétrie.
- 4) Prouver que la fonction $g(x) = -\frac{x^2 + |x + 5| + 10x + 25}{x^4 + 20x^3 + 125x^2 + 250x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; -5; -10\}$ admet la droite d'équation $x = -5$ comme axe de symétrie.

Exercice 8 : Les points M , N et P sont-ils alignés ?

- 1) $M(4;-1)$; $N(7;-3)$; $P(-5;5)$
- 2) $M(-2;3)$; $N(-3;7)$; $P(-5;14)$
- 3) $M\left(2;-\frac{1}{3}\right)$; $N(3;-1)$; $P(0;1)$

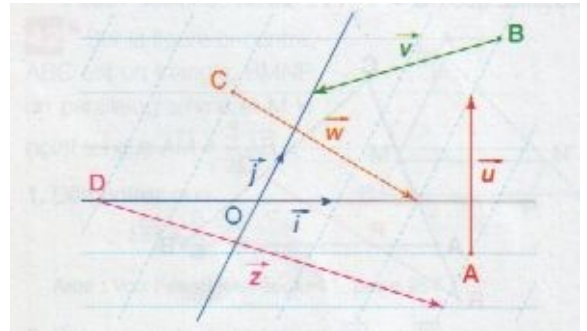
Exercice 9 : Soient $A(5;-3)$ et $B(2;-5)$.

- 1) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\vec{AC} = -\frac{7}{3}\vec{AB}$.
- 2) Exprimer le vecteur \vec{BC} en fonction du vecteur \vec{AC} .

Exercice 10 : ABC est un triangle et les points M et N sont définis par :

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{BC} \text{ et } \vec{AN} = -\frac{4}{3}\vec{BC}.$$

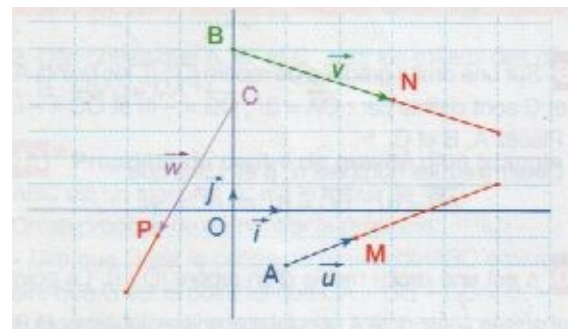
Montrer que les points A , M et N sont alignés.



Exercice 11 : Lire les coordonnées des vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et \vec{z} .

Exercice 12 : On considère le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-contre.

- 1) Quelle est la nature de ce repère ?
- 2) Trouver les coordonnées des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .
- 3) En déduire celles des points N , M et P .
- 4) Les vecteurs \vec{s} et \vec{t} ont pour coordonnées respectives $(2;1)$ et $(1;-1)$.
 - a) Quelle est la nature du repère $(O; \vec{s}, \vec{t})$?
 - b) Donner les coordonnées des vecteurs \vec{i} et \vec{j} dans le repère $(O; \vec{s}, \vec{t})$.
 - c) En déduire les coordonnées des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} dans le repère $(O; \vec{s}, \vec{t})$.



Exercice 13 :

- 1) Déterminer tous les polynômes de degré 3 admettant les réels 1, -1 et 2 pour racines.
- 2) Déterminer tous les polynômes de degré 4 admettant les réels 1, 2, 3 pour racines et $2x^4$ comme terme de plus haut degré.

Exercice 14 : Chercher des racines évidentes des polynômes suivants, et en déduire leur factorisation :

$$P_1(x) = 5x^3 - 11x^2 + 3x - 27$$

$$P_2(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 1$$

$$P_3(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$$

Exercice 15 :

- 1) Vérifier à l'aide d'une division euclidienne si 1 est racine des polynômes suivants :
 - a) $P_4(x) = 8x^5 - 3x^4 + 6x^2 - 4x - 7$
 - b) $P_5(x) = x^7 + 3x^5 - 4x^4 + 9x + 11$
 - c) $P_6(x) = -x^6 - x^5 + x^3 + 2x^2 - 3$
- 2) Vérifier à l'aide d'une seule division euclidienne si $\frac{1}{2}$ et 3 sont racines de $P_7(x) = 4x^4 - 28x^3 + 25x^2 + 84x - 45$

Exercice 16 : Déterminer les réels a , b et c pour que le polynôme $P_8(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$ soit divisible par $(x^2 - 1)(x - 3)$.

Exercice 17 :

- Déterminer les réels m , n et p pour que pour tout réel x , on ait : $mx^2+3x-p=n+4$.
- Les deux polynômes $a(x+1)^2+b(x+1)+c$ et $2x^2+5x+3$ sont égaux. Déterminer les réels a , b et c .
- Déterminer les réels a et b tels que, pour tous réels x , on ait : $\frac{-3x^2-2x+3}{x^2+1}=a+\frac{bx+c}{x^2+1}$.

Exercice 18 : Résoudre :

a) $\frac{x^3-5x+4}{x^4-9} \geq 0$

b) $\frac{(x^4+2)(x^3+1)}{x^3-x^2+x-1} < 0$

Exercice 19 : Soit (d) la droite d'équation $3x-y+5=0$ et (C) le cercle d'équation $x^2+y^2-8x-6y=0$.

- Préciser les caractéristiques de (d) et de (C) .
- Donner une représentation paramétrique de (d) .
- Calculer les coordonnées des points d'intersection entre (d) et (C) (si ils existent).
- Donner les équations des tangentes à (C) parallèles à (d) .

Exercice 20 : Soit (d) la droite d'équation $4x-3y+5=0$ et soit A le point de coordonnées $(-2;14)$.

- Donner une représentation paramétrique de (d) .
- Donner une représentation paramétrique de la parallèle (d') à (d) passant par A .
- Chercher l'équation cartésienne du cercle C de centre A tangent à (d) .
- Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle C avec la droite (d') .

Exercice 21 : Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction

$$f(x)=\frac{5x^3+3x+8}{x^4-1}$$

Exercice 22 : Étudier les limites des fonctions suivantes aux bornes de leurs ensembles de définition et préciser si elles possèdent ou non des asymptotes obliques :

$$a(x)=x^3-3x+2$$

$$b(x)=-x^3+6x^2-8$$

$$c(x)=\frac{x^2-4x+1}{x}$$

$$d(x)=x-3+\frac{4}{x+2}$$

$$e(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}$$

$$f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$$

$$g(x)=\frac{-3}{2}x^3+2x-1$$

$$h(x)=x-\frac{1}{x+1}$$

$$i(x)=\frac{(x+2)^2}{x+3}$$

$$j(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-1$$

$$k(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+2$$

$$l(x)=(2x^2-6x+1)(4x-5)$$

$$m(x)=\frac{x^2-5x+10}{x-3}$$

$$n(x)=\frac{-x^2+15x-9}{x^2+9}$$

$$o(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+4}$$

$$p(x)=\frac{x}{2}-4+\frac{2}{x+1}$$

$$q(x)=2\sqrt{x}-x+3$$

$$r(x)=(6-x)\sqrt{x}$$

Question : Pourquoi la fonction racine n'est-elle pas dérivable en 0 alors qu'elle est définie en 0 ?

Rappel : f est dérivable en a si le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a .

Dans ce cas, on doit calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ qui n'est pas une limite finie, donc la fonction racine n'est pas dérivable en 0.

On peut observer cela graphiquement, en remarquant que la tangente en 0 au graphe de la fonction racine est parallèle à l'axe des ordonnées (on pourrait dire de coefficient directeur « infini »).

Exercice 23 : Pour chacune des fonctions f suivantes :

- Préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité,
- Calculer f' ,
- Donner l'équation de la tangente en a .

1) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x^3 + 3x - 5)$; $a = 3$

2) $f(x) = (x^3 - 3x + 2)^{47}$; $a = -2$

3) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{2x + 7}$; $a = 0$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$; $a = 0$

Exercice 24 : Prouver que $(1;2)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Exercice 25 : Réaliser les études des fonctions suivantes (ensemble de définition, parité, limites, dérivabilité, dérivée, tableau de variations, esquisse du graphe) :

1) $g(x) = (x-1)^2(x+1)$

2) $h(x) = \frac{x-x^2}{x+1}$.

Exercice 26 :

- 1) Préciser les caractéristiques du cercle C d'équation $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 24 = 0$.
- 2) Trouver les coordonnées des points de C ayant pour abscisse 7.
- 3) Donner les équations des tangentes à C en ces points là.

Exercice 27 : Décomposer 1 000 001 en une somme de deux termes dont le produit est maximal.

Exercice 26 : On inscrit un cône dans une sphère de centre O de rayon 10 cm. On note O' le centre de la base du cône. Quelle doit être la distance OO' pour que le volume du cône soit maximale ?